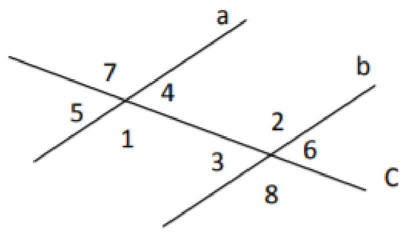
Справочный материал по геометрии.

I. Параллельные прямые.

Прямые a и b пересечены секущей c



$\angle 1$ и $\angle 2$; $\angle 3$ и $\angle 4$ – накрест лежащие углы

$\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 5$ - соответственные углы

$\angle 2$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 6$ - соответственные углы

$\angle 1$ и $\angle 3$; $\angle 2$ и $\angle 4$ - односторонние углы

Признаки параллельности прямых:

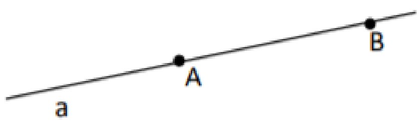
1. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

2. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны

3. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180º, то прямые параллельны.

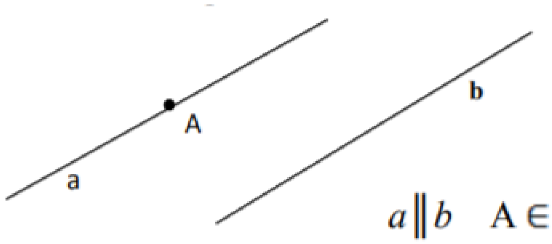
II. Некоторые аксиомы планиметрии.

1. Через любые две различные точки проходит прямая, и при этом только одна.



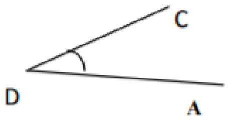
$A \in a \qquad B \in a$

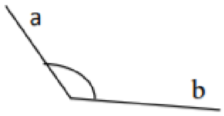
2. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

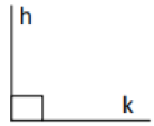


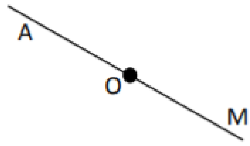
$a \parallel b \quad A \in a$

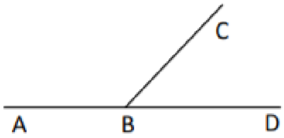
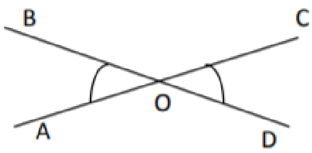
III. Углы.

<table>
<tr>
<td>Острый угол
меньше прямого угла


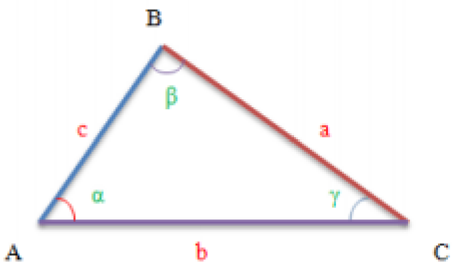
$\angle CDA < 90^\circ$</td>
<td>Тупой угол
больше прямого угла


$90^\circ < \angle ab < 180^\circ$</td>
<td>Прямой угол


$\angle hk = 90^\circ$</td>
<td>Развернутый угол


$\angle AOM = 180^\circ$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Смежные углы

</td>
<td colspan="2">$\angle ABC$ и $\angle CBD$ – смежные углы
$\angle ABC + \angle CBD = 180^\circ$
Сумма смежных углов равна 180°.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Вертикальные углы

</td>
<td colspan="2">$\angle AOB$ и $\angle COD$ – вертикальные
$\angle AOB = \angle COD$
Вертикальные углы равны.</td>
</tr>
</table>

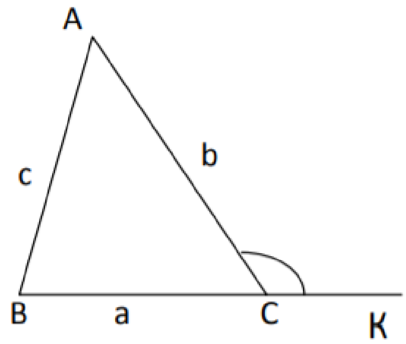
IV. Треугольник.



В треугольнике ABC:

- a, b и c - длины сторон BC, AC и AB соответственно.
- A, B, C - величины углов BAC, ABC и BCA соответственно.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника ABC.
- h_a, h_b, h_c - длины высот AA_2, BB_2, CC_2 треугольника ABC соответственно.
- R - радиус окружности, описанной около треугольника ABC.
- r - радиус окружности, вписанной в треугольник ABC;
- S_{ABC} - площадь треугольника ABC.

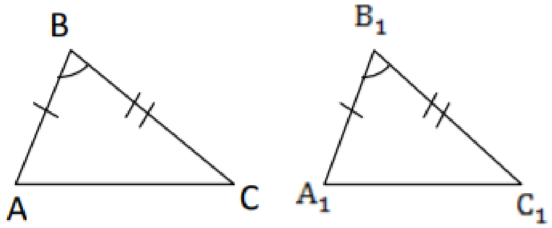
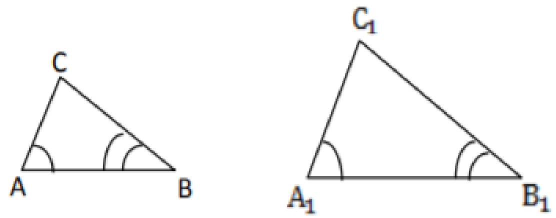
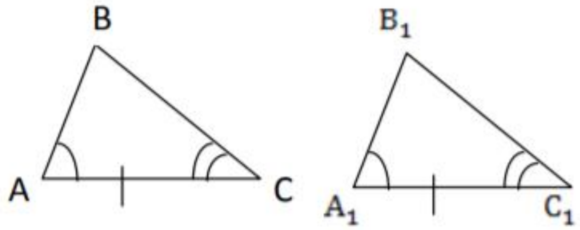
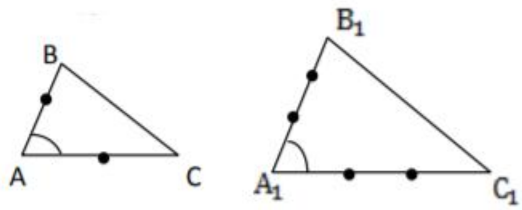
Имеют место следующие соотношения:

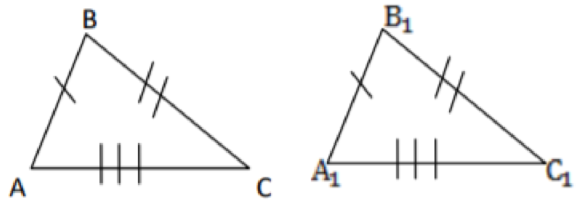
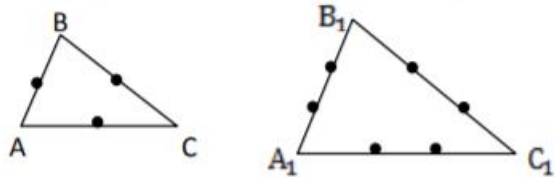
<table>
<tr>
<td rowspan="3">
</td>
<td>Сумма углов треугольника равна 180°.
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
Свойство внешнего угла: $\angle ACK = \angle A + \angle B$</td>
</tr>
<tr>
<td>Неравенство треугольника
$a < b+c \quad b < a+c \quad c < a+b$
Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.
$a > b - c$, где $b > c$</td>
</tr>
<tr>
<td>Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника
$b > c \Rightarrow \angle B > \angle C$ и $\angle B > \angle C \Rightarrow b > c$
В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
Против большего угла лежит большая сторона.</td>
</tr>
</table>

$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$ (теорема синусов);
$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$ (теорема косинусов);

Площадь треугольника ABC можно найти следующими способами:

- $S_{ABC} = \frac{1}{2} a h_a$;
- $S_{ABC} = \frac{1}{2} absinC$;
- $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$;
- $S_{ABC} = pr$;
- $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона)

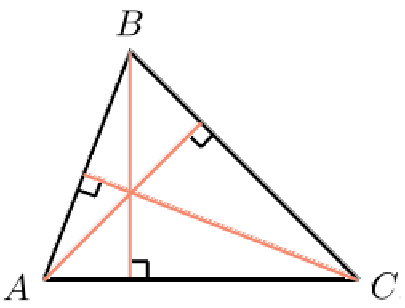
Признаки равенства треугольников	Признаки подобия треугольников
По двум сторонам и углу между ними.  $AB = A_1B_1 \quad CB = C_1B_1 \quad \angle B = \angle B_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.	1По двум углам.  $\angle A = \angle A_1 \quad \angle B = \angle B_1$ ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$ Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
По стороне и двум прилежащим углам.  $AC = A_1C_1 \quad \angle A = \angle A_1 \quad \angle C = \angle C_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	По двум сходственным сторонам и углу между ними.  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \qquad \angle A = \angle A_1$ ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$ Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

По трем сторонам	По трем сходственным сторонам
 $AB = A_1B_1 \quad CB = C_1B_1 \quad AC = A_1C_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$ Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Что еще вы должны знать про треугольник?

В любом треугольнике можно провести замечательные линии.

1. <u>Высота</u> - перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.

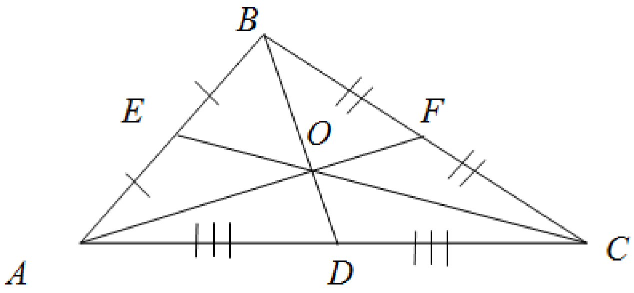


2 <u>Медиана</u> - отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

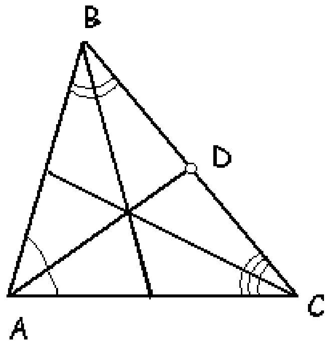
Основные свойства медианы:

а) Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.

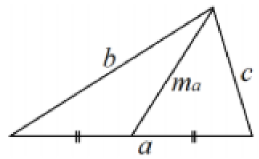
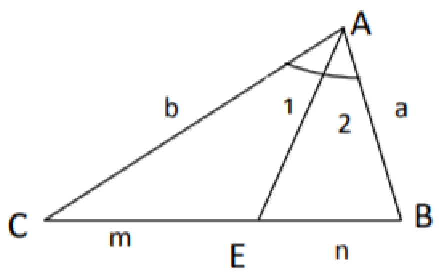
б) Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.



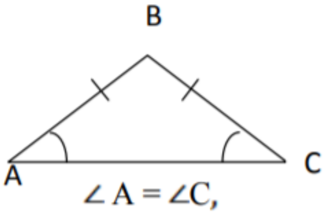
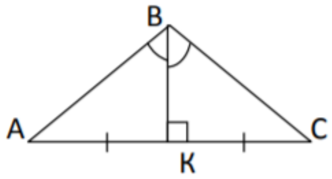
3. <u>Биссектриса</u> - отрезок, который соединяет вершину с противоположной стороной и делит соответствующий угол пополам.



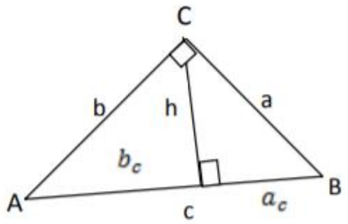
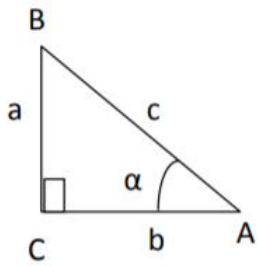
Какие формулы вам пригодятся:

Если в задаче дана медиана	 $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$
Если в задаче дана биссектриса	 $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$

СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕНННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны  $\angle A = \angle C$, AC – основание AB и BC – боковые стороны	Биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой  BK – биссектриса BK – медиана BK - высота

IV.I. Прямоугольный треугольник и начало тригонометрии.

Основные соотношения в прямоугольном треугольнике		
 	**Теорема Пифагора** $c^2=a^2+b^2$ Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.	Пропорциональные отрезки $h^2=a_cb_c$ $a^2=a_cc$ $b^2=b_cc$ $h=\frac{ab}{c}$
 $\angle C = 90^0$ $\angle A = \alpha$ c = AB – гипотенуза a = BC – катет, противолежащий к α b = AC – катет, прилежащий к углу α	СИНУС Отношение противолежащего катета к гипотенузе	$\sin\alpha=\frac{a}{c}$
	КОСИНУС Отношение прилежащего катета к гипотенузе	$\cos\alpha=\frac{b}{c}$
	ТАНГЕНС Отношение противолежащего катета к прилежащему	$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a}{b}$
	КОТАНГЕНС Отношение прилежащего катета к противолежащему	$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{b}{a}$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

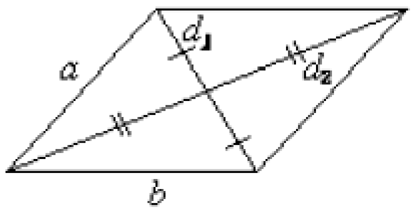
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{ctg}\alpha = 1$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ – **основное тригонометрическое тождество** $\left.\begin{array}{l} \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \end{array}\right\}$ формулы приведения

V. Четырехугольники.

II. Четырехугольники.

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства параллелограмма:



1. Противолежащие стороны равны;

2. Противоположные углы равны;

3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам;

4. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°;

5. Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон:

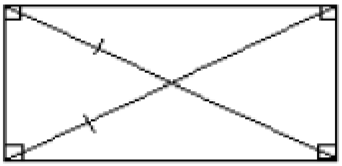
Признаки параллелограмма:

Четырехугольник является параллелограммом, если хотя бы одно из условий выполняется:

1. Две его противоположные стороны равны и параллельны.

2. Противоположные стороны попарно равны.

3. Противоположные углы попарно равны.



Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Свойства прямоугольника:

1. Все свойства параллелограмма;

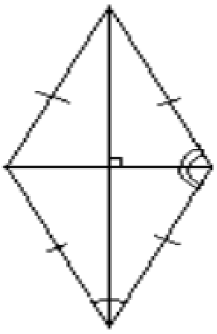
2. Диагонали равны.

Признаки прямоугольника:

Параллелограмм является прямоугольником, если хотя бы одно из условий выполняется:

1. Один из его углов прямой.

2. Его диагонали равны.



Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны.

Свойства ромба:

1. Все свойства параллелограмма;

+

2. диагонали перпендикулярны;

3. диагонали являются биссектрисами его углов.

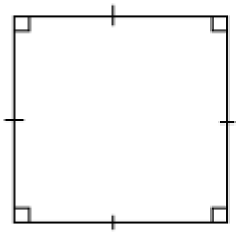
Признаки ромба:

Параллелограмм является ромбом, если хотя бы одно из условий выполняется:

1. Две его смежные стороны равны.

2. Его диагонали перпендикулярны.

3. Одна из диагоналей является биссектрисой его угла.



Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Из определения следует, что квадрат является ромбом, следовательно, он обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Еще свойства квадрата:

1. Все углы квадрата прямые;

2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.

Признаки квадрата:

Прямоугольник является квадратом, если он обладает каким-нибудь признаком ромба.

Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Свойства трапеции:

1. Ее средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме;

2. Если трапеция равнобокая, то ее диагонали равны и углы при основании равны;

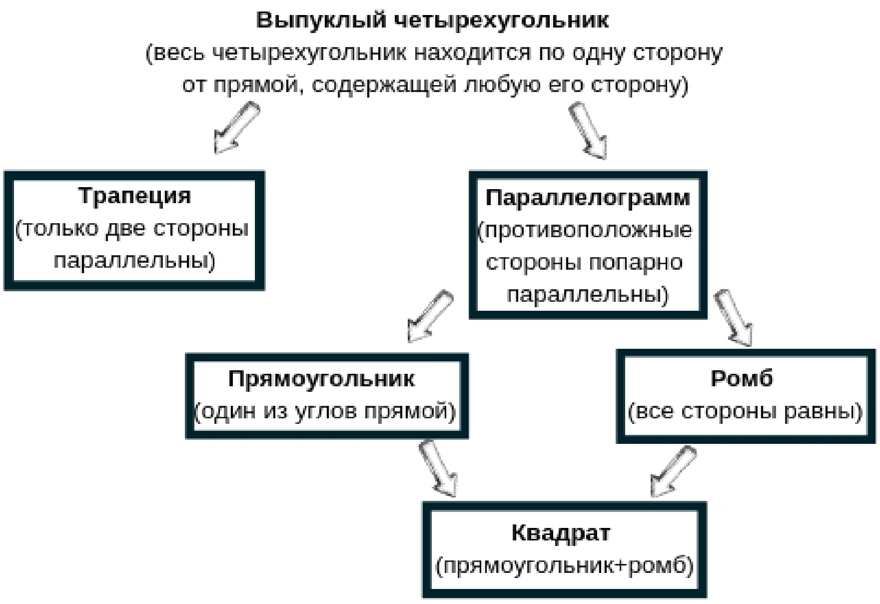
3. Если трапеция равнобокая, то около нее можно описать окружность;

4. Если сумма оснований равна сумме боковых сторон, то в нее можно вписать окружность.

Признаки трапеции:

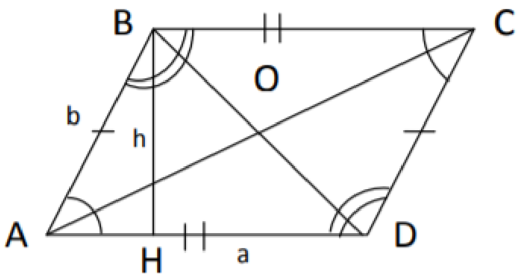
Четырехугольник является трапецией, если его параллельные стороны не равны

Друзья, для более наглядного понимания, вам будет удобно зарисовать себе в тетрадь такую табличку:



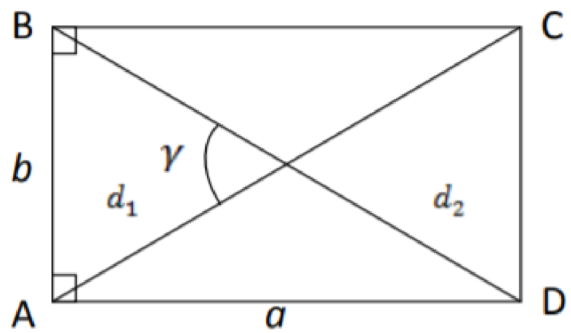
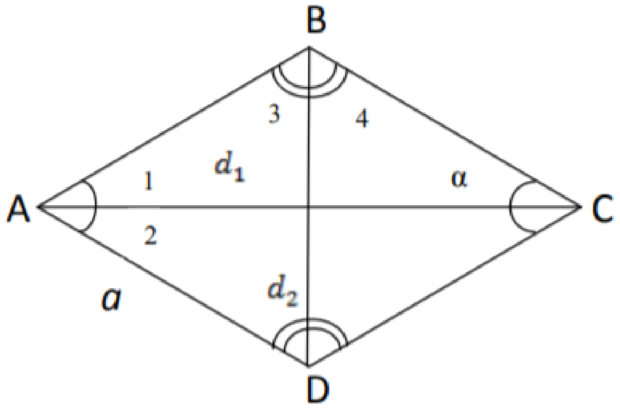
Выпишите в тетрадь следующие формулы:

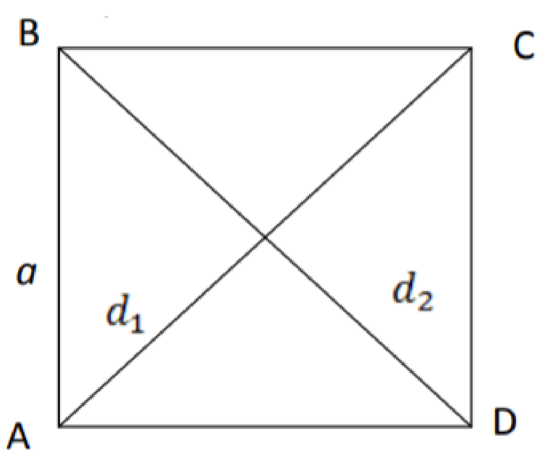
Для параллелограмма:



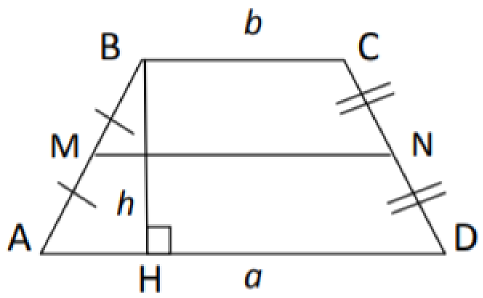
$S = ah$, где a = AD – основание h = BH – высота	$S = ab\cdot \sin\alpha$, где a = AD, b = AB, $\angle a = \angle BAD$	$S = \dfrac{AC\cdot BD\cdot \sin\angle AOB}{2}$	$S = 4\cdot S_{\Delta AOB}$

Для частных случаев параллелограмма (прямоугольник, ромб, квадрат):

	$S = ab$ $S = \dfrac{d_1{}^2\sin\gamma}{2}$ – площадь $P = 2(a + b)$ - периметр $d_1{}^2 = a^2+b^2$
	$S = a^2\sin\alpha$ $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$ - площадь $P = 4a$ – периметр $d_1{}^2 + d_2{}^2 = 4a^2$

	$S = a^2$ – площадь $S = \frac{d_1^{\,2}}{2}$ $S = \frac{1}{2}Pr$, где r – радиус вписанной окружности $P = 4a$ - периметр $d_1 = a\sqrt{2}$

И для трапеции:



$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

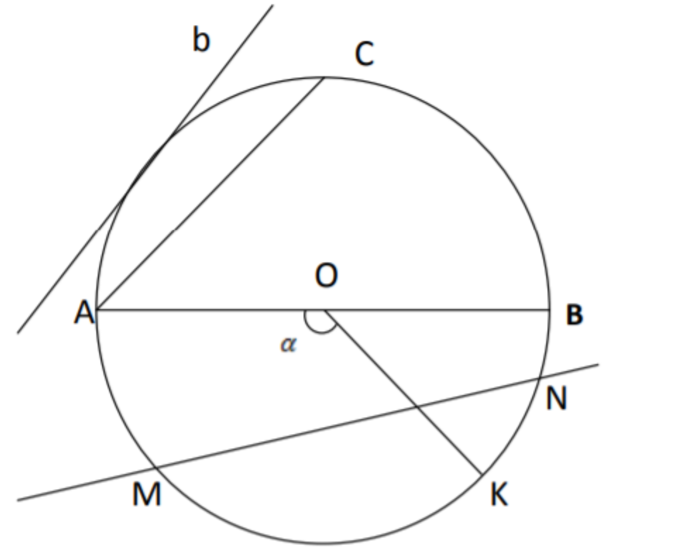
MN - средняя линия. $MN = \frac{BC+AD}{2}$

VI. Окружность и круг.

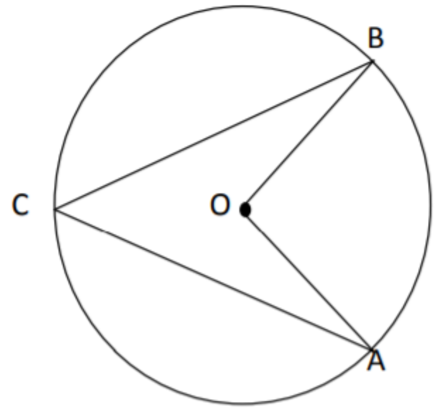
Соотношения между элементами окружности и круга.

Окр. (O; r)
т. O – центр окружности
OK = OB = OA = r – радиус
AB = d – диаметр
b – касательная
AC – хорда
MN - секущая
$\breve{AK}$ - дуга окружности

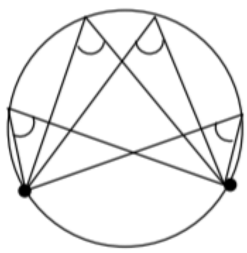
$d = 2r$
$C = 2\pi r$ - длина окружности
$C = \pi d$
$L = \frac{r\pi\alpha}{180°}$ - длина дуги



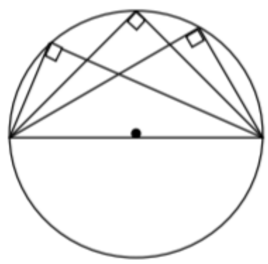
$\breve{AB}$ - дуга окружности
∠AOB - **центральный угол**
∠AOB = $\breve{AB}$
Градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается.
∠ACB – **вписанный угол**
$\angle ACB = \frac{\breve{AB}}{2}$
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается.
$\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2}$, если $\breve{AB}$ меньше полуокружности



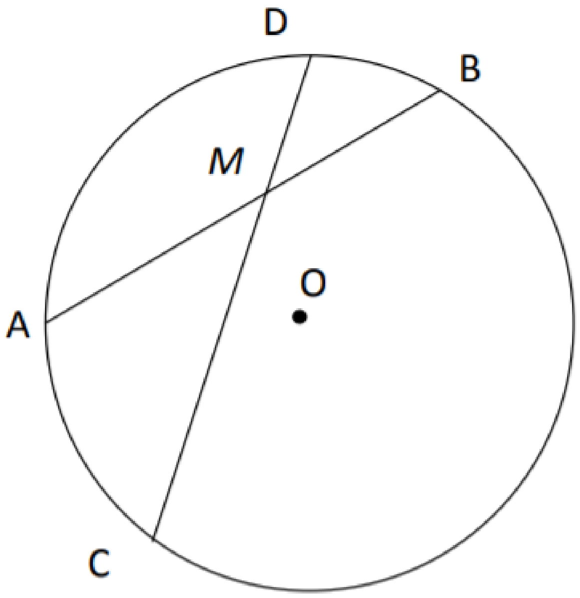
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – прямой.

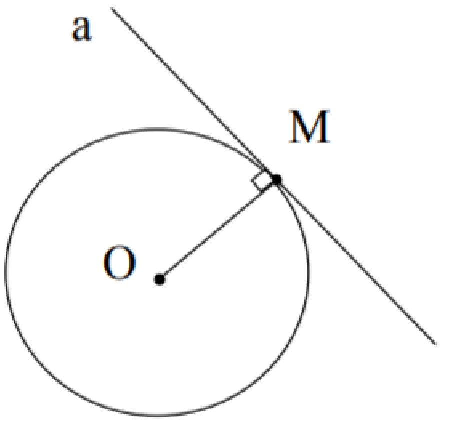


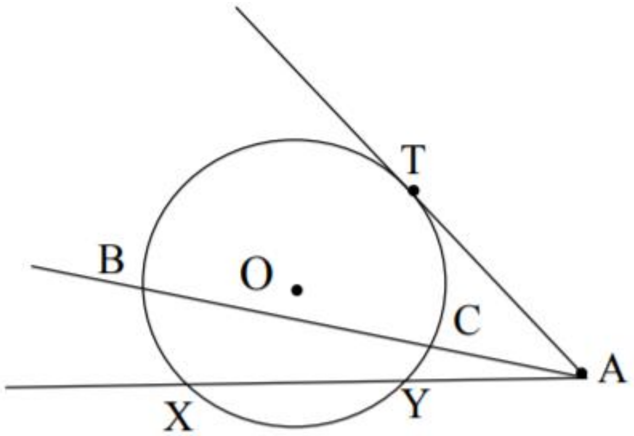
Свойства окружности и ее элементов:

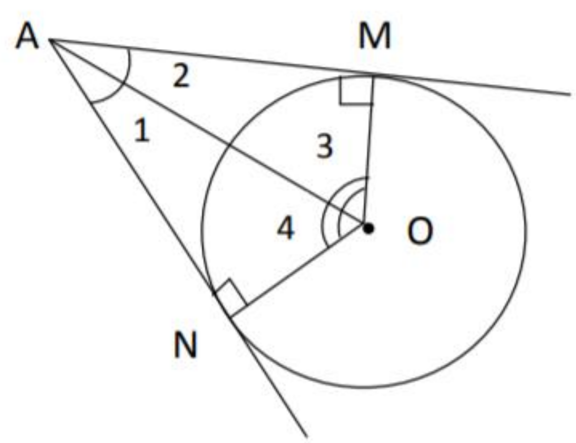
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Свойство хорд

AB; CD – хорды

$AB \cap CD = M$
$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

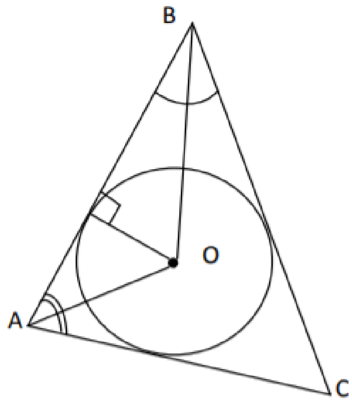
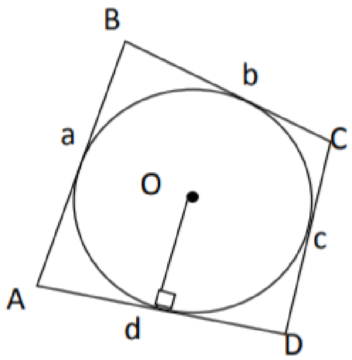
Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Свойство касательной
OM – радиус
a – касательная
M – точка касания

$OM \perp a$
Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>AT – касательная
AB; AX – секущие
$AT^2 = AX \cdot AY$
$AT^2 = AB \cdot AC$</td>
</tr>
</table>

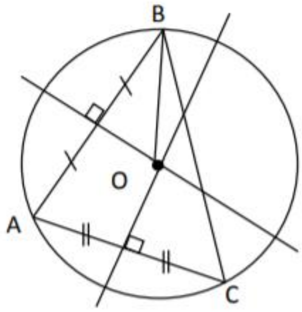
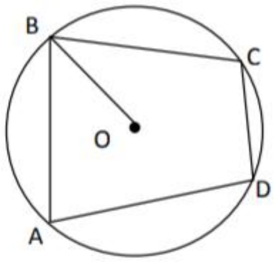
	AM, AN – касательные M, N – точки касания AM = AN $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Теперь самое главное:

Вписанная окружность.

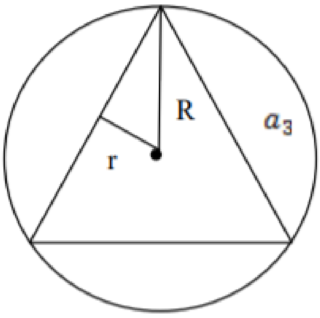
	В любой треугольник можно вписать окружность. Её центр – точка пересечения биссектрис треугольника. $r = \frac{2S}{a+b+c}$ - радиус вписанной окружности a, b, c – стороны треугольника S – площадь треугольника
	В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, только если: $a + c = b + d$, где a, b,c, d- стороны четырехугольника

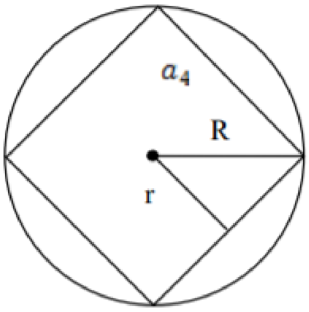
И описанная окружность:

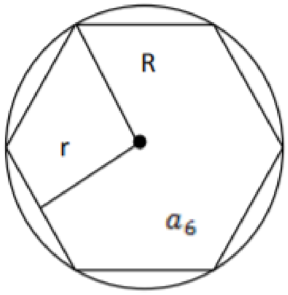
	Около любого треугольника можно описать окружность. Её центр – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. $R = \frac{abc}{4S}$ - радиус описанной окружности a, b, c – стороны треугольника S – площадь треугольника
	Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность, только если: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

VII. Правильные многоугольники.

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.







$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$ – вычисление угла многоугольника

$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$ – сторона многоугольника

$S = \frac{1}{2} \cdot Pr$ - площадь

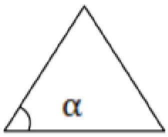
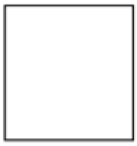
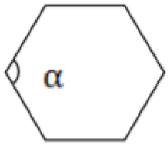
$r = R\cos\frac{180°}{n}$

n – число сторон

R – радиус описанной окружности

r – радиус вписанной окружности

P – периметр

	треугольник 	квадрат 	шестиугольник 
$\angle\alpha$	$60°$	$90°$	$120°$
a	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_6 = R$
R	$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$	$R = \frac{a_4}{\sqrt{2}}$	$R = a_6$
r	$r = \frac{1}{2}R$	$r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$	$r = \frac{\sqrt{3}}{2}R$